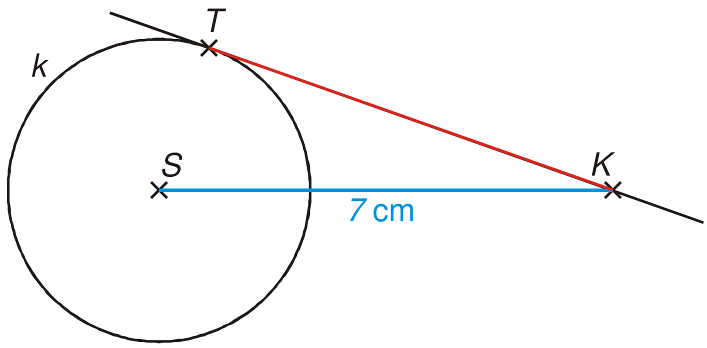
3.4.7 Délka kružnice (obvod kruhu) II

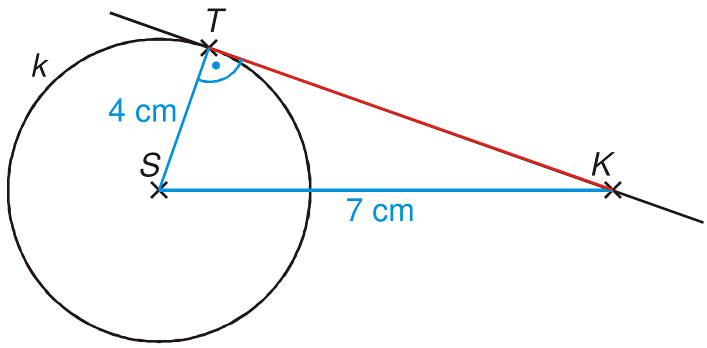
Předpoklady: 030406

Př. 1: Bod K je od středu kružnice $k(S;4\text{cm})$ vzdálen 7 cm. Urči početně vzdálenost z bodu K do bodu T, který je tečným bodem tečny kružnice k jdoucí z bodu K. Svůj výsledek ověř rýsováním (při rýsování samozřejmě nemůžeš použít vypočtenou hodnotu vzdálenosti $|KT|$).

Náčrtek:



Zkusíme do obrázku doplnit další vzdálenost $\Rightarrow$ úsečka ST je poloměr kružnice a je kolmá na tečnu.



Získali jsme pravoúhlý trojúhelník SKT, pro který můžeme použít Pythagorovu větu.

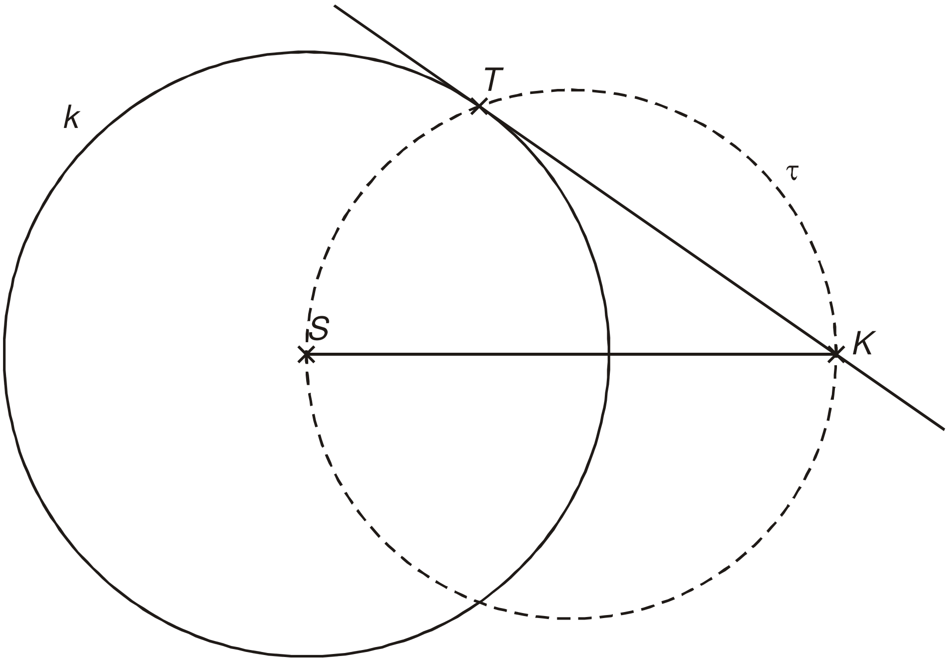
$|KS|^2 = |KT|^2 + |TS|^2 \qquad / - |TS|^2$

$|KT|^2 = |KS|^2 - |TS|^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$

$|KT| = \sqrt{33} \doteq 5,7\,\text{cm}$

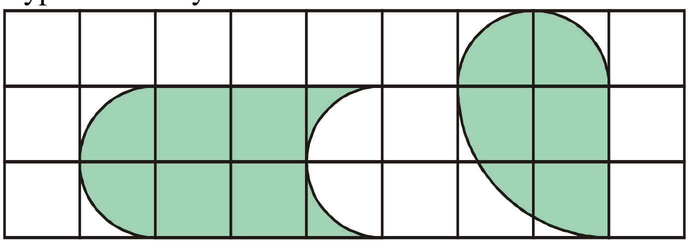
Bod K je od bodu T vzdálen 5,7 cm.

Konstrukce:



Vzdálenost $|KT| = 5,7\,\text{cm}$.

Př. 2: Vypočti obvody obrazců na obrázku. Strana čtvercové sítě měří 5 cm.



Příklad vypočti normálně, pak se snaž najít způsob, jak výsledky zapsat zcela přesně.

Levý obrazec:

- dvě strany o délce 3 čtverečky: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30\,\text{cm}$,
- dvě půlkružnice (jedna kružnice) o poloměru 1 čtvereček: $2 \cdot \pi \cdot 5 = 31,4\,\text{cm}$,

Celkem: $30 + 31,4\text{ cm} = 61,4\,\text{cm}$.

Pravý obrazec:

- jedna strana o délce 2 čtverečky: $2 \cdot 5 = 10\,\text{cm}$,
- jedna půlkružnice o poloměru 1 čtvereček: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 \doteq 15,7\,\text{cm}$,
- jedna čtvrtkružnice o poloměru 2 čtverečky: $\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \doteq 15,7\,\text{cm}$

Celkem: $10 + 15,7 + 15,7 = 41,4\,\text{cm}$

Pokud chceme udat výsledek zcela přesně, nesmíme za π dosadit nepřesnou hodnotu z kalkulačky a musíme ho pořád zapisovat pomocí symbolu.

Levý obrazec:

- dvě strany o délce 3 čtverečky: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30\,\text{cm}$,

- dvě půlkružnice (jedna kružnice) o poloměru 1 čtvereček: $2\cdot\pi\cdot5=10\pi\,\text{cm}$,

Celkem: $30+10\pi\text{ cm}=10(3+\pi)\text{cm}$.

Pravý obrazec:

- jedna strana o délce 2 čtverečky: $2\cdot5=10\,\text{cm}$,
- jedna půlkružnice o poloměru 1 čtvereček: $\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot5=5\pi\,\text{cm}$,
- jedna čtvrtkružnice o poloměru 2 čtverečky: $\frac{1}{4}\cdot2\cdot\pi\cdot10=5\pi\,\text{cm}$

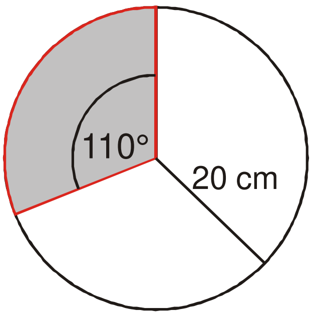
Celkem: $10+5\pi+5\pi\text{ cm}=10+10\pi\,\text{cm}=10(1+\pi)\text{ cm}$

Př. 3: U cyklistických tachometrů je nutné nastavit průměr kola. Proč? Kolikrát se kolo o průměru 70 cm otočí během 15 km dlouhého výletu?

Tachometr neměří vzdálenost, ale počet otočení kola. Z počtu otočení vypočte pomocí průměru uraženou vzdálenost.
Průměr kola ... $70\,\text{cm}=0,7\text{ m}$
Obvod kola (vzdálenost uražená při jednom otočení) ... $o=\pi d=\pi\cdot0,7\text{ m}=2,20\text{m}$
Počet otočení: $\frac{15\,000}{2,2}=6820$.

Během 15 km dlouhého výletu se kolo otočí 6820 krát.

Př. 4: Urči obvod kruhové výseče vyseknuté z kruhu o poloměru 20 cm, jestliže její středový úhel má velikost $110°$.



Obvod výseče: Dva poloměry a obvod oblouku dohromady
Umíme snadno určit obvod celého kruhu. Jak určíme obvod oblouku?
Nápad: Čím větší středový úhel výseče, tím větší část zabírá její oblouk z původní kružnice $\Rightarrow$ přímá úměrnost.

$360°$ ... $2\pi r$
$110°$ ... x

$\frac{x}{110°}=\frac{2\pi r}{360}$ (každému stupni středového úhlu odpovídá stejně velký úsek na obvodu)

$x=\frac{2\pi r}{360}\cdot110=\frac{2\pi r}{36}\cdot11=\frac{11\pi r}{18}=\frac{11\pi\cdot20}{18}\text{ cm}\doteq38,4\text{ cm}$

Celý obvod úseče: $20+20+38,4\text{ cm}=78,4\text{ cm}$

Obvod úseče má délku 78,4 cm.

Př. 5: Poloměr menší kružnice představuje dvě třetiny poloměru větší kružnice. Urči obvod menší kružnice, jestliže větší má obvod 40 cm.

Jestliže poloměr menší kružnice představuje dvě třetiny poloměru větší kružnice, průměr menší kružnice bude představovat také dvě třetiny průměru větší kružnice.

Průměr větší kružnice: $d=\frac{40}{\pi}\text{ cm}=12,7\text{ cm}$.

Průměr menší kružnice: $d=\frac{2}{3}\cdot 12,7\text{ cm}=8,47\text{ cm}$

Obvod menší kružnice: $o=\pi d=\pi\cdot 8,47\text{ cm}=26,6\text{ cm}$

Menší kružnice má obvod 26,6 cm.

Mohli jsme vypočítat obvod rovnou jako dvě třetiny obvodu větší kružnice (poměr poloměru, průměru i obvodů kružnice je vždy stejný).
Můžeme si vypočítat s písmenky:

$$o_v=\pi d_v \quad /:\pi$$

$$d_v=\frac{o_v}{\pi}$$

Menší poloměr představuje dvě třetiny většího: $d_m=\frac{2}{3}d_v=\frac{2}{3}\frac{o_v}{\pi}$.

Obvod menší kružnice: $o_m=\pi d_m=\pi\frac{2}{3}\frac{o_v}{\pi}=\frac{2}{3}o_v$.

Př. 6: Obvod Země je přibližně 40 000 km. Urči s přesností na tři platné číslice poloměr Země.

$$o=2\pi r \quad /:2\pi$$

$$r=\frac{o}{2\pi}=\frac{40\,000}{2\pi}\text{ km}=6\,370\text{ km}$$

Země má poloměr 6370 km.

Př. 7: Jak vysoko nad zemí by se mohl okolo Země vznášet provázek, jehož délka je pouze o jeden metr větší než obvod Země. Předpokládej, že Země je dokonalá koule.

Obvod země: $o_Z=2\pi r_z \Rightarrow r_z=\frac{o_Z}{2\pi}$.

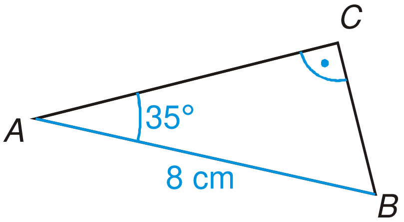
Délka provázku: o_Z+1.

Poloměr kružnice z provázku: $r=\frac{o_p}{2\pi}=\frac{o_Z+1}{2\pi}=\frac{o_Z}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}=r_Z+0,16\text{ m}$.

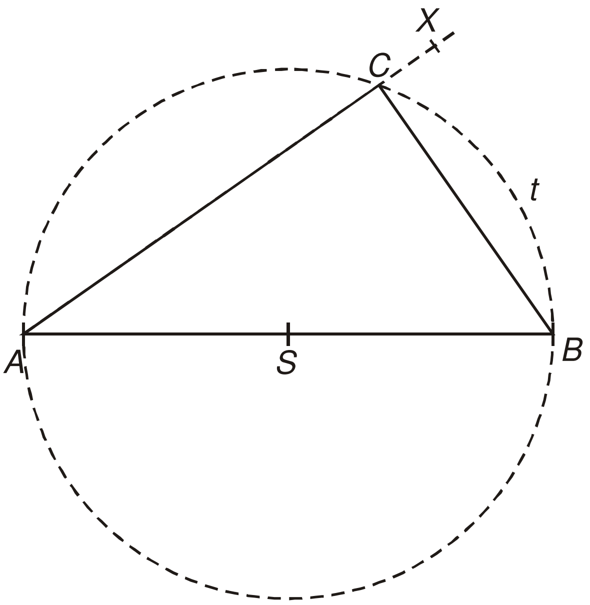
Provázek by se mohl vznášet ve výšce 0,16 m nad zemí.

Př. 8: Je dána (tzn. je narýsována) úsečka *AB*, $|AB| = 7\,\text{cm}$. Narýsuj bod *C* tak, aby trojúhelník *ABC* byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *C* a platilo $\alpha = 35°$.
Protože úsečka *AB* je dána, musíš ji narýsovat jako první.

Náčrtek:



Narýsujeme úsečku *AB* (musí být první). Pomocí úhlu α sestrojíme polopřímku *AC* a na ní musíme najít bod *C*. Při tom využijeme informaci o pravém úhlu *ACB*. Úhel *ACB* je pravý $\Rightarrow$ musí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem *AB*.



1. $AB; |AB| = c = 7\,\text{cm}$
2. $S; |SA| = |SB|; S \in AB$
3. $t(S; |SA|)$
4. $X; |\sphericalangle BAX| = 35°$
5. $C \in \mapsto AX \cap t$
6. $\triangle ABC$

Shrnutí: Bod, u kterého má trojúhelník pravý úhel, můžeme hledat pomocí Thaletovy kružnice.